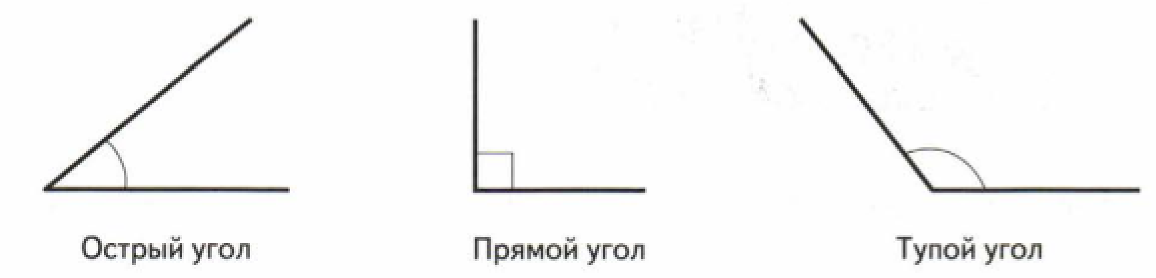
ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ
по геометрии
7 – 9 класс

учитель математики
Ларикова Ольга Владимировна
МБОУ «СОШ № 15»
г. Братск

2022

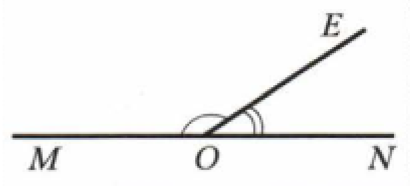
7 класс **Виды углов**

Угол называется **прямым**, если он **равен 90^0**
Угол называется **острым**, если он **меньше 90^0**
Угол называется **тупым**, если он **больше 90^0, но меньше 180^0**



Смежные и вертикальные углы

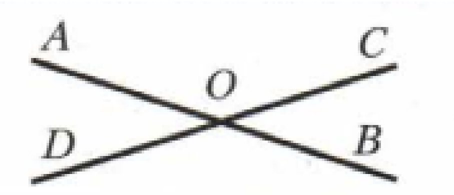
1. Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными.**

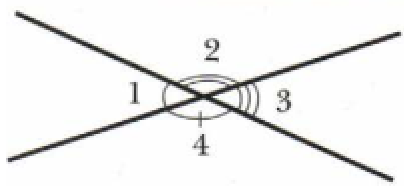


OE – **общая** сторона

Сумма смежных углов равна 180^0. $\angle MOE + \angle EON = 180^0$

2. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла являются продолжением сторон другого угла.





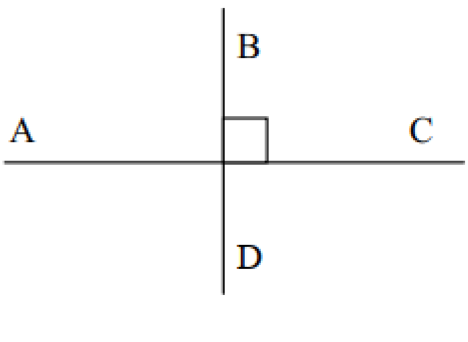
Вертикальные углы равны.

$\angle 1 = \angle 3$

$\angle 2 = \angle 4$

Перпендикулярные прямые

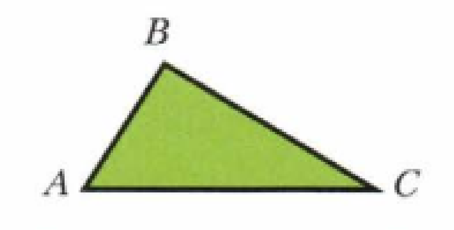
Две пересекающиеся прямые называются **перпендикулярными**, если при пересечении они образуют четыре **прямых** угла.



$BD \perp AC$

7 класс **<u>Треугольник</u>**

Треугольником называется геометрическая фигура, состоящая из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех отрезков, соединяющих эти точки.



Точки *A, B, C* – **вершины** Δ *ABC*.

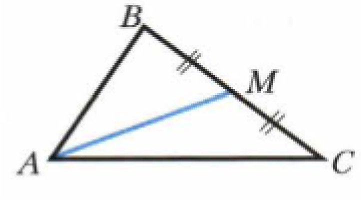
Отрезки *AB, BC, AC* – **стороны** ΔABC.

$\angle A, \angle B, \angle C$ – **углы** Δ *ABC*.

$$P_\Delta = AB + BC + AC$$

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

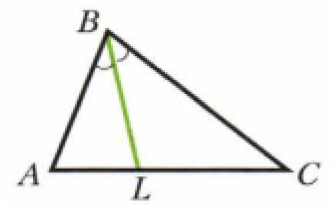
1. Отрезок, соединяющий **вершину** треугольника с серединой противолежащей стороны, называется **медианой** треугольника.



AM – **медиана** ΔABC

$BM = MC$

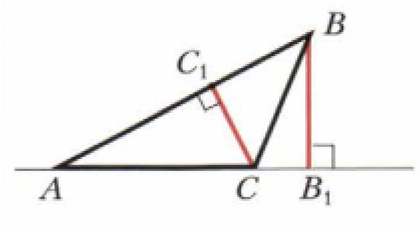
2. Отрезок, соединяющий **вершину** треугольника с точкой на противолежащей стороне, и **делящий** угол треугольника пополам, называется **биссектрисой** треугольника.



BL – **биссектриса** ΔABC

$$\angle ABL = \angle CBL$$

3. **Перпендикуляр,** проведенный из вершины треугольника к противолежащей стороне, называется **высотой** треугольника.



CC_1 – **высота** ΔABC, BB_1 – **высота** ΔABC

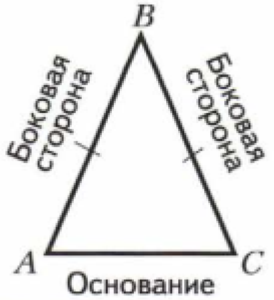
$CC_1 \perp AB$, $BB_1 \perp AC$

7 класс **Признаки равенства треугольников**

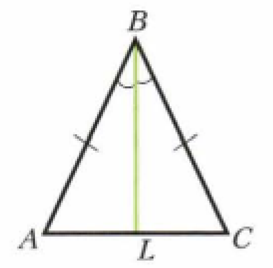
1 признак: Если **две стороны** и **угол между ними** одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.
2 признак: Если **сторона** и **два прилежащих к ней угла** одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.
3 признак: Если **три** стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Свойства равнобедренного треугольника

Треугольник называется **равнобедренным**, если две его стороны равны.



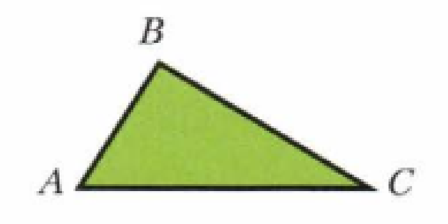
1 свойство: В равнобедренном треугольнике **углы при основании равны.**
2 свойство: В равнобедренном треугольнике **биссектриса, проведенная к основанию**, является **медианой и высотой.**



1) $\angle A = \angle C$
2) BL – биссектриса $(\angle ABL = \angle CBL)$
BL – медиана $(AL = LC)$
BL – высота $(\angle BLA = \angle BLC = 90^0)$

Сумма углов треугольника

Сумма углов треугольника равна **180⁰**.

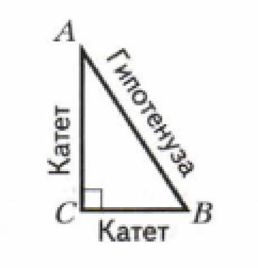


$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$

7 класс **<u>Виды треугольников</u>**

1. **Остроугольный** треугольник – все **три** угла треугольника **острые**.
2. **Прямоугольный** треугольник – **один угол прямой**, а два острые.
3. **Тупоугольный** треугольник – **один угол тупой**, два угла острые.

Свойства прямоугольных треугольников



1. Сумма **острых** углов прямоугольного треугольника **равна 90^0**. $\angle A + \angle B = 90^0$
2. **Катет** прямоугольного треугольника, лежащий против угла в **30^0**, равен **половине гипотенузы**.

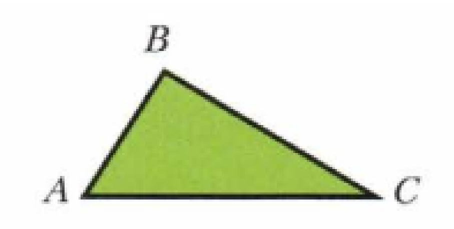
$$Если \angle A = 30^0, то \; CB = \frac{1}{2} AB.$$

Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике: 1) против **большей** стороны лежит **больший** угол;
2) против **большего** угла лежит **большая** сторона.

Неравенство треугольника

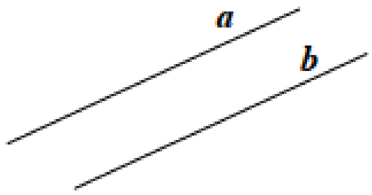
Каждая сторона треугольника **меньше суммы** двух других сторон.



1) AB < BC + AC
2) BC < AB + AC
3) AC < AB + BC

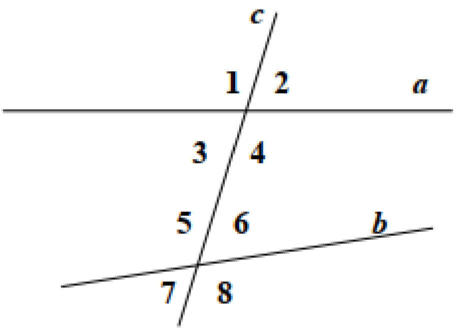
7 класс **Параллельные прямые**

Две прямые называются **параллельными**, если они **не пересекаются**.



$a \parallel b$

Названия углов, образованных при пересечении двух прямых секущей



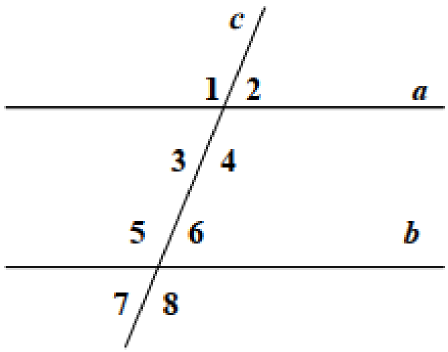
c – секущая

накрест лежащие углы: $\angle 3$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 5$

односторонние углы: $\angle 3$ и $\angle 5$; $\angle 4$ и $\angle 6$

соответственные углы: $\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 7$
$\angle 2$ и $\angle 6$; $\angle 4$ и $\angle 8$

Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей (*свойства параллельных прямых*)



$a \parallel b$

c - секущая

Теорема 1: Если две **параллельные** прямые пересечены секущей,
то **накрест лежащие** углы **равны**.
$\angle 3 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 5$

Теорема 2: Если две **параллельные** прямые пересечены секущей,
то **соответственные** углы **равны**.
$\angle 1 = \angle 5$; $\angle 3 = \angle 7$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 4 = \angle 8$

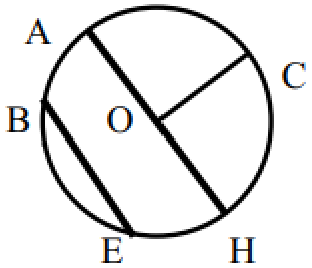
Теорема 3: Если две **параллельные** прямые пересечены секущей,
то **сумма односторонних** углов равна **180^0**.
$\angle 3 + \angle 5 = 180^0$; $\angle 4 + \angle 6 = 180^0$

7 класс

Окружность

Окружностью называется геометрическая фигура, все точки которой находятся на **заданном расстоянии** от данной точки (**центра** окружности).

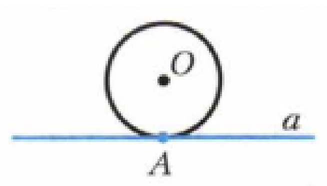
Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называют **радиусом** окружности.
Отрезок, соединяющий **две точки** окружности, называется **хордой**.
Хорда, проходящая через центр окружности, называется **диаметром**.
Часть окружности, ограниченная двумя точками, называется **дугой** окружности.



O – **центр** окружности
OC – **радиус** окружности (**R**)
AH – **диаметр** окружности (**D = 2R**)
BE – **хорда** окружности
BE, EH, HC, AC, AB – **дуги** окружности

Касательная к окружности

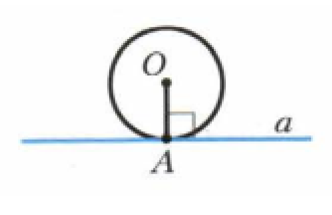
Прямую, имеющую с окружностью только **одну** общую точку, называют **касательной** к окружности.



прямая ***a*** – **касательная** к окружности
точка ***A*** – точка **касания**

Свойство касательной

Касательная к окружности **перпендикулярна радиусу**, проведенному в точку касания.

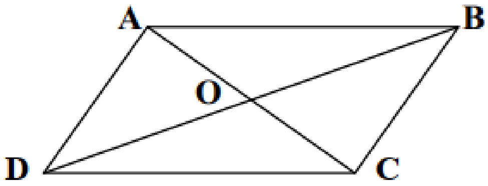


OA ⊥ *a*

8 класс **Четырехугольники**

Параллелограмм

Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно **параллельны**.



AB || DC; AD || BC

AC и DB – **диагонали**

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^0$

$\angle A + \angle B = 180^0$; $\angle A + \angle D = 180^0$;

Свойства параллелограмма

В параллелограмме: 1) противоположные стороны **равны** (AB=CD; AD=BC)

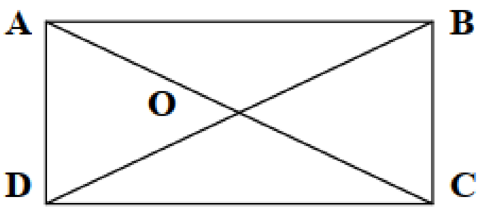
2) противоположные углы **равны** ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$)

3) Диагонали в точке пересечения делятся **пополам** (AO=OC; BO=OD)

Прямоугольник

Прямоугольником называется параллелограмм, у которого **все** углы **прямые.**

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$



Свойства прямоугольника

В прямоугольнике: 1) противоположные стороны **равны** (AB=CD; AD=BC)

2) Противоположные углы **равны** ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$)

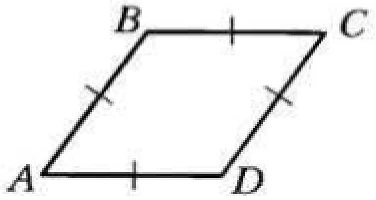
3) Диагонали в точке пересечения делятся **пополам**

4) Диагонали **равны** (AC=BD)

8 класс **Ромб**

Ромбом называется параллелограмм, у которого **все** стороны **равны**.

AB = BC = AD = CD



Свойства ромба

В ромбе: 1) Противоположные углы **равны** ($\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$)

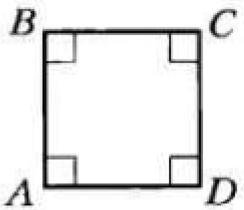
2) Диагонали в точке пересечения делятся **пополам**

3) Диагонали взаимно **перпендикулярны** (AC $\perp$ BD)

4) Диагонали делят углы **пополам** (AC – **биссектриса** $\angle A$ и $\angle C$, BD – **биссектриса** $\angle B$ и $\angle D$)

Квадрат

Квадратом называется прямоугольник, у которого **все** стороны **равны**.



AB = BC = AD = CD

$\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^0$

Свойства квадрата

В квадрате: 1) Диагонали в точке пересечения делятся **пополам**

2) Диагонали **равны** (AC = BD)

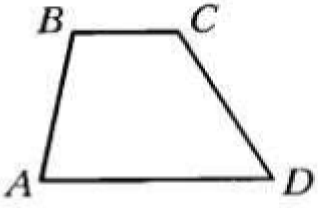
3) Диагонали взаимно **перпендикулярны** (AC $\perp$ BD)

4) Диагонали делят углы **пополам**

(AC – **биссектриса** $\angle A$ и $\angle C$,BD – **биссектриса** $\angle B$ и $\angle D$)

Трапеция

Трапецией называется четырехугольник, у которого две стороны **параллельны**, а две другие **не параллельны**.



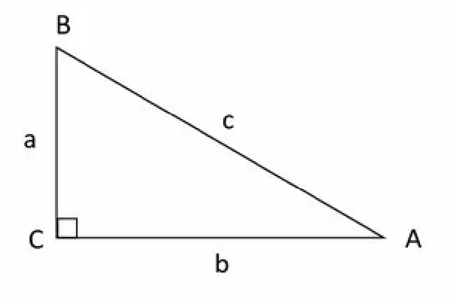
8 класс **Площадь многоугольника**

1. Площадь **квадрата** равна квадрату его стороны. $S = a^2$

2. Площадь **прямоугольника** равна произведению его смежных сторон.
$$S = a \cdot b$$
3. Площадь **параллелограмма** равна произведению его основания на высоту. $S = a \cdot h$
4. Площадь **треугольника** равна половине произведения его основания на высоту. $S = \frac{1}{2} a \cdot h$
5. Площадь **трапеции** равна произведению полусуммы ее оснований на высоту. $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$

Теорема Пифагора

В прямоугольном треугольнике **квадрат** гипотенузы равен сумме **квадратов** катетов.



AB – гипотенуза
BC и AC – катеты

$$c^2 = a^2 + b^2$$

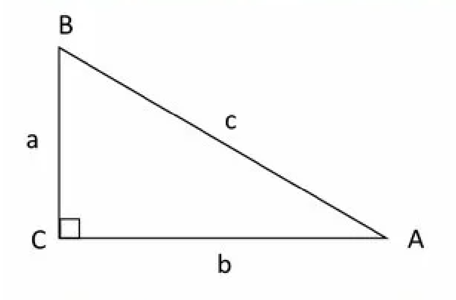
Признаки подобия треугольников

1 признак: Если **два угла** одного треугольника соответственно **равны двум углам** другого треугольника, то такие треугольники подобны.

2 признак: Если **две стороны** одного треугольника **пропорциональны двум сторонам** другого треугольника и **углы, заключенные между этими сторонами, равны**, то такие треугольники подобны.

3 признак: Если **три стороны** одного треугольника **пропорциональны трем сторонам** другого треугольника, то такие треугольники подобны.

8 класс **Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника**



AB – гипотенуза, CB и AC – катеты

$\angle A$ и $\angle B$ – острые углы

Для $\angle B$: **AC** – противолежащий катет,
BC – прилежащий катет

Для $\angle A$: **BC** – противолежащий катет
AC – прилежащий катет

Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего** катета к **гипотенузе**.

$$\sin \angle A = \frac{BC}{AB} \qquad \sin \angle B = \frac{AC}{AB}$$

Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **прилежащего** катета к **гипотенузе**.

$$\cos \angle A = \frac{AC}{AB} \qquad \cos \angle B = \frac{BC}{AB}$$

Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение **противолежащего** катета к **прилежащему** катету.

$$tg \angle A = \frac{BC}{AC} \qquad tg \angle B = \frac{AC}{BC}$$

Основное тригонометрическое тождество

$$\cos^2 \angle A + \sin^2 \angle A = 1$$

Формула тангенса угла

Тангенс угла равен отношению **синуса** угла к **косинусу** этого угла.

$$tg \angle A = \frac{\sin \angle A}{\cos \angle A}$$

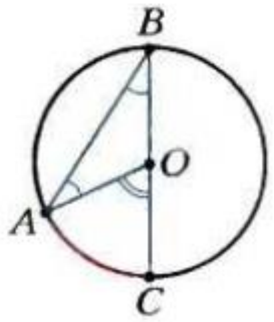
8 класс **Центральные и вписанные углы**

Угол с вершиной в **центре** окружности называют **центральным** углом.

Центральный угол **равен дуге**, на которую он **опирается**.

Угол, **вершина** которого находится **на окружности**, а стороны **пересекают** окружность, называется **вписанным**.

Вписанный угол равен **половине дуги**, на которую он **опирается**.



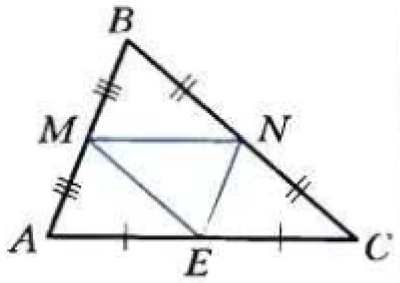
$\angle AOC$ – центральный угол

$\angle ABC$ – вписанный угол

$$\angle AOC = \cup AC \qquad \angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC$$

Средняя линия треугольника

Средней линией треугольника называется **отрезок**, соединяющий **середины** двух его сторон.



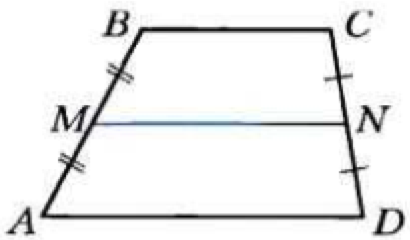
MN, NE, ME – средние линии треугольника ABC

$$MN \parallel AC, \quad MN = \frac{1}{2} AC$$

Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух его сторон, **параллельна** третьей стороне и равна **ее половине**.

Средняя линия трапеции

Средней линией трапеции называется **отрезок**, соединяющий **середины** её боковых сторон.

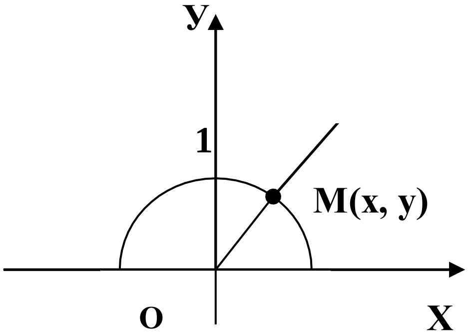


MN - средняя линия трапеции

$$MN \parallel BC \parallel AD \qquad MN = \frac{BC + AD}{2}$$

Средняя линия трапеции **параллельна** основаниям и равна их **полусумме.**

9 класс **<u>Синус, косинус, тангенс</u>**



Радиус ***OM* = *1*.**

Обозначим $\angle$***MOX* ,** который образует луч ***OM*** с осью ***X*,** буквой **α.**

Для любого угла **α** из промежутка $0^0 \le$ **α** $\le 180^0$ **синусом** угла **α** называется <u>ордината</u> **у** точки ***M*,** **косинусом** угла **α –** <u>абсцисса</u> **х** точки ***M*.**

$$0 \le \sin\alpha \le 1 \qquad -1 \le \cos\alpha \le 1$$

Тангенсом угла **α** называется **отношение** sin**α** к cos**α:**

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\sin 0^0 = 0 \quad \sin 90^0 = 0 \quad \sin 180^0 = 0$$

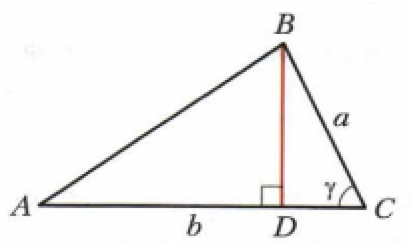
$$\cos 0^0 = 1 \quad \cos 90^0 = 0 \quad \cos 180^0 = -1$$

<u>Формулы приведения</u>

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha \qquad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

<u>Соотношения между сторонами и углами треугольника</u>

Площадь треугольника равна **половине** произведения **двух** его **сторон** на **синус** угла **между** ними.



$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin C$$

<u>Теорема синусов</u>: **Стороны** треугольника **пропорциональны** синусам **противолежащих** углов.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

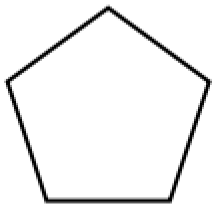
<u>Теорема косинусов</u>: Квадрат **стороны** треугольника равен **сумме** квадратов **двух** других сторон **минус** удвоенное произведение этих сторон на **косинус** угла **между** ними.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

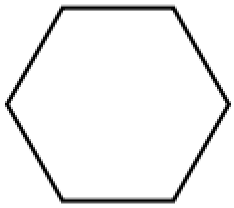
9 класс **Правильные многоугольники**

Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, у которого **все углы равны и все стороны равны**.

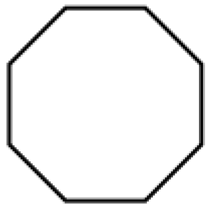
Пятиугольник



Шестиугольник



Восьмиугольник



Формулы для вычисления площади правильного многоугольника, его стороны и радиуса вписанной окружности

n	a		R	r	S	S
3	$R\sqrt{3}$	$2r\sqrt{3}$	$2r$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$3r^2\sqrt{3}$
4	$R\sqrt{2}$	$2r$	$r\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	$4r^2$
6	R	$\frac{2r\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2r\sqrt{3}}{3}$	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$2r^2\sqrt{3}$
n	$a_n = 2R\sin\frac{180^\circ}{n} = 2rtg\frac{180^\circ}{n}$			$r = R\cos\frac{180^\circ}{n}$		$S = \frac{1}{2}Pr$

a – сторона правильного ***n*** – угольника, ***S*** – площадь, ***P*** – периметр,
R – радиус описанной окружности, ***r*** – радиус вписанной окружности

Длина окружности. Площадь круга

$$\boxed{C = 2\pi R} \qquad \boxed{S = \pi R^2}$$

где $\pi \approx 3{,}14$, ***C*** – длина окружности, ***S*** - площадь круга.